23/5/16

Ευκλείδιος Χώρος

V R-διαν. χώρος $(V, \langle\ \rangle)$

Ορισμός: Ερμητιανός χώρος λέγεται ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με ένα μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο: $V \times V \to \mathbb{C}$

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \to \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$$

τέτοιο ώστε:

1. $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \overline{\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle}$
2. $\langle \lambda\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \lambda \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$
3. $\langle \vec{\alpha_1} + \vec{\alpha_2}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\alpha_1}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{\alpha_2}, \vec{\beta} \rangle$
4. Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε $\underbrace{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}_{\in \mathbb{R}} > 0$

$$\langle \vec{\alpha}, \lambda\vec{\beta} \rangle \overset{①}{=} \overline{\langle \lambda\vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle} \overset{②}{=} \overline{\lambda \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle} = \bar{\lambda}\, \overline{\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle} = \bar{\lambda} \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$$

Δεν σέβεται το ~~Βαθμωτό~~ γινόμενο

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta_1} + \vec{\beta_2} \rangle \overset{①}{=} \overline{\langle \vec{\beta_1} + \vec{\beta_2}, \vec{\alpha} \rangle} \overset{②}{=} \overline{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\alpha} \rangle + \langle \vec{\beta_2}, \vec{\alpha} \rangle} =$$

$$\overline{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\alpha} \rangle} + \overline{\langle \vec{\beta_2}, \vec{\alpha} \rangle} = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta_1} \rangle + \langle \vec{\alpha_1}, \vec{\beta_2} \rangle$$

Κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$
(συνήθες εσωτερικό γινόμενο)

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

$$(z_1, z_2, \ , z_n)(w_1, w_2, \ , w_n) \to \langle (z_1, z_2, \ , z_n),(w_1, w_2, \ , w_n) \rangle$$
$$= z_1\bar{w_1} + z_2\bar{w_2} + \quad + z_n\bar{w_n}$$

1) $\langle z, w \rangle = z_1\bar{w_1} + z_2\bar{w_2} + \quad + z_n\bar{w_n}$ $\quad \{ \langle z,w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle}$

$\langle w, z \rangle = w_1\bar{z_1} + w_2\bar{z_2} + \quad + w_n\bar{z_n}$

$\overline{\langle w, z \rangle} = \overline{w_1\bar{z_1} + w_2\bar{z_2} + \quad + w_n\bar{z_n}}$

$= \overline{w_1\bar{z_1}} + \overline{w_2\bar{z_2}} + \quad + \overline{w_n\bar{z_n}}$

$= \bar{w_1}\bar{\bar{z_1}} + \bar{w_2}\bar{\bar{z_2}} + \quad + \bar{w_n}\bar{\bar{z_n}}$

$= \bar{w_1}z_1 + \bar{w_2}z_2 + \quad + \bar{w_n}z_n = \langle z, w \rangle$

$\langle \lambda\vec{z}, \vec{w} \rangle = \langle (\lambda \cdot z_1, \lambda \cdot z_2, \ , \lambda \cdot z_n),(w_1, w_2, \ , w_n) \rangle$

$= \lambda \cdot z_1 \cdot \bar{w_1} + \lambda \cdot z_2 \cdot \bar{w_2} + \quad + \lambda \cdot z_n \cdot \bar{w_n}$

$= \lambda \cdot (z_1\bar{w_1} + z_2\bar{w_2} + \quad + z_n\bar{w_n})$

$= \lambda \cdot \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$

ΘΣ. $\langle \vec{z} + \vec{z}', \vec{w} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{z}', \vec{w} \rangle$

$\langle \vec{z} + \vec{z}', \vec{w} \rangle = \langle (z_1, z_2, \ , z_n) + (z_1', z_2', \ , z_n')(w_1, w_2, \ , w_n)$

$= \langle (z_1 + z_1', z_2 + z_2', \ , z_n + z_n')(w_1, w_2, \ , w_n) \rangle$

$= (z_1 + z_1') \cdot \bar{w_1} + (z_2 + z_2')\bar{w_2} + \quad + (z_n + z_n') \cdot \bar{w_n}$

$= z_1\bar{w_1} + z_1' \cdot \bar{w_1} + z_2\bar{w_2} + z_2' \cdot \bar{w_2} + \quad + z_n\bar{w_n} + z_n'\bar{w_n}$

$= z_1\bar{w_1} + z_2\bar{w_2} + \ldots + z_n\bar{w_n} + z_1'\bar{w_1} + z_2'\bar{w_2} + \quad + z_n'\bar{w_n}$

$= \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{z}', \vec{w} \rangle$

Έστω $\vec{z} = (z_1, z_2, \ , z_n) \neq (0, 0, 0)$

$\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \langle (z_1, z_2, \ , z_n), (z_1, z_2, \ , z_n) \rangle$

$= z_1\bar{z_1} + z_2\bar{z_2} + \quad + z_n\bar{z_n}$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \quad + |z_n|^2 > 0 \in \mathbb{R}$

Μήκος διανύσματος $\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$

$\vec{a}, \vec{\beta}$ κάθετα $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = 0 = \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle$

Φυλλάδιο #8

Άσκηση 1

Στο $\mathbb{C}^3$ εφοδιασμένο με το συνήθες μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου V που παράγεται από τα διανύσματα: $(1,1,i)$ $(0,i,-1)$

Λύση

Τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$\vec{a_1} = (1,1,i)$ $\vec{a_2} = (0,i,-1)$ βάση του V

Εφαρμόζω Gram-Schmidt

$\vec{\beta_1} = \vec{a_1} = (1,1,i)$

$\vec{\beta_2} = \vec{a_2} - \dfrac{\langle \vec{a_2}, \vec{\beta_1} \rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1} \rangle} \cdot \vec{\beta_1}$ Έχει σημασία η σειρά των γινομένων, γιατί είμαστε στο $\mathbb{C}$

$= (0,i,1) - \dfrac{\langle (0,i,-1),(1,1,i) \rangle}{\langle (1,1,i)(1,1,i) \rangle} (1,1,i)$

$\vec{\beta_2} = (0,i,-1) - \dfrac{i+i}{3}(1,1,i) = (0,i,-1) - \dfrac{2i}{3}(1,1,i) =$

$= (0,i,-1) - \left(\dfrac{2i}{3}, \dfrac{2i}{3}, \dfrac{-2}{3}\right) = \left(\dfrac{-2i}{3}, \dfrac{i}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$

$= \langle (1,1,i), \left(\dfrac{-2i}{3}, \dfrac{i}{3}, \dfrac{-1}{3}\right) \rangle = \dfrac{2i}{3} - \dfrac{i}{3} - \dfrac{i}{3} = 0$

$|\vec{\beta_1}| = \sqrt{(1,1,i),(1,1,i)} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$|\vec{\beta_2}| = \sqrt{\left(\dfrac{-2i}{3}, \dfrac{i}{3}, \dfrac{-1}{3}\right),\left(\dfrac{-2i}{3}, \dfrac{i}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)} = \sqrt{\dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{6}{9}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$$\vec{\gamma_1} = \frac{\vec{\beta_1}}{|\vec{\beta_1}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,i)$$

$$\vec{\gamma_2} = \frac{\vec{\beta_2}}{|\vec{\beta_2}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2i}{3}, \frac{i}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τότε:

i) Ο πίνακας $\bar{A} = (\bar{a_{ij}})$ λέγεται συζυγής πίνακας του A.

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 3+i \\ 0 & 4-i & 2i \\ 0 & 7i & 15 \end{pmatrix}$ τότε $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 3-i \\ 0 & 4+i & -2i \\ 0 & -7i & 15 \end{pmatrix}$

ii) Ο πίνακας $A^* = \bar{A}^t$ λέγεται αναστροφοσυζυγής του A

Παράδειγμα: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2i & 4+i & -7i \\ 3-i & -2i & 15 \end{pmatrix}$, όπου A από προηγούμενο παράδειγμα.

iii) Ο πίνακας A ονομάζεται μοναδιαίος αν είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $A^{-1} = A^*$ (δηλ. $A^* \cdot A = I_n = A \cdot A^*$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a_{11}} & \bar{a_{12}} & \bar{a_{1n}} \\ \bar{a_{21}} & \bar{a_{22}} & \bar{a_{2n}} \\ \\ \bar{a_{n1}} & \bar{a_{n2}} & \bar{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a_{11}} & \bar{a_{21}} & \bar{a_{n1}} \\ \bar{a_{12}} & \bar{a_{22}} & \\ \\ \bar{a_{1n}} & \bar{a_{2n}} & \bar{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

A μοναδιαίος

$$A^* \cdot A = I_n, \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{n2} \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

το μήκος της $1^{\eta\varsigma}$ στήλης είναι 1

iv) Ο πίνακας A ονομάζεται ερμιτιανός αν $A^* = A$ (αντίστοιχη έννοια συμμετρικού πίνακα στο $\mathbb{R}$)

Φασματικό Θεώρημα: για ερμιτιανούς πίνακες
Για κάθε Ερμιτιανό πίνακα A υπάρχει μοναδιαίος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta$ όπου Δ διαγώνιος πίνακας $(P^* \cdot A \cdot P = \Delta)$

Κάθε Ερμιτιανός πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος και υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα

Ορισμός: Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται κανονικός αν $A \cdot A^* = A^* \cdot A$

Θεώρημα: Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει μοναδιαίος πίνακας $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $P^* \cdot A \cdot P$ να είναι διαγωνιοποιήσιμος

Παρατηρήσεις: $A^t = A$
- Κάθε συμμετρικός πραγματικός πίνακας είναι κανονικός
$A \cdot A^* = A \cdot A^t = A^2 = A^t A = A^* A$
- Κάθε ερμιτιανός πίνακας είναι κανονικός
$(A = A^*)$ $A \cdot A^* = A A = A^* \cdot A$

- Κάθε ορθογώνιος πραγματικός πίνακας είναι κανονικός
  $A^t \cdot A = I_n = A \cdot A^t$ ... $A \cdot A^* = A \cdot A^t = I_n = A^t \cdot A = A^* \cdot A$
- Κάθε μοναδιαίος είναι κανονικός